1 Généralités

1.1 Éléments et ensembles

1.1.1 Exemples

L'ensemble des lettres de l'alphabet latin : l'alphabet est l'*ensemble*, les lettres sont les *éléments* de l'ensemble.

L'ensemble des personnes présentes dans cette salle : chaque personne est un élément, toutes ces personnes sont les éléments d'un ensemble.
Si cette salle est vide, l'ensemble n'a pas délément, on l'appelle *Ensemble vide* et on le note $\emptyset$.

L'ensemble des nombres entiers positifs dont l'écriture binaire occupe au plus un octet. $0001100_{b\,2}$ est un élément de cet ensemble, mais pas $11100011001_{b\,2}$ dont l'écriture binaire nécessite 11 bits.

1.1.2 Remarque

La définition d'un ensemble doit être précise, elle doit être comprise de la même façon par tous.
Dire : « L'ensemble des français d'environ 40 ans » ne définit pas vraiment un ensemble.

1.2 Notations

1.2.1 Éléments et Ensembles

On donne généralement un nom à l'ensemble en utilisant une lettre.
Par exemple appelons E l'ensemble des entiers de 0 à 11.
Pour dire que 5 est dans cet ensemble, on écrit $5 \in E$, on le lit « 5 est un élément de E » ou encore « 5 appartient à E » .
la notation $E \ni 5$ a la même signification, on peut lire « E a pour élément 5 ».
Mais « 23 n'est pas un élément de E » s'écrit $23 \notin E$ ou encore $E \not\ni 23$.
$\in$ est le signe d'*appartenance*, $\notin$ est le signe de *non appartenance*.

appartenance	non-appartenance
$a \in E$	$a \notin E$

1.2.2 Ensemble défini par la Liste des Éléments

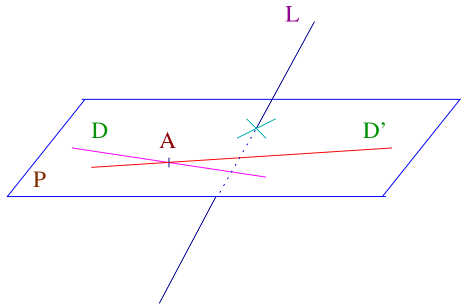
$E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$ est défini « *en extension* », c'est-à-dire par la liste de ses éléments, celle ci est écrite entre deux *accolades*, les éléments sont séparés par des *virgules* ou des *points virgules*. L'ordre dans lequel on écrit les éléments est uniquement choisi en fonction de son intérêt pratique : ainsi $E = \{7; 3; 10; 5; 0; 4; 11; 1; 6; 9; 2; 8\}$ est gênant mais correct – sous réserve de vérification ! –.

1.2.3 Ensemble défini par une Propriété

Dire : P est l'ensemble des entiers positifs pairs, ou encore P est l'ensemble des entiers positifs multiples de 2, permet de définir $P = \{x \in N, x \text{ est pair}\}$, c'est la définition en *compréhension* de l'ensemble.

1.2.4 Des Ensembles Connus

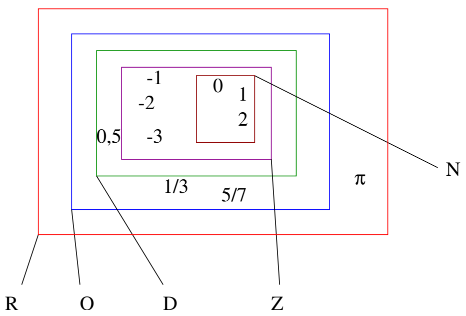
<u>Ensembles de la Géométrie</u>



Les droites, les demi-droites, les segments, les triangles, les cercles …sont des ensembles dont les éléments sont des points.
Pour indiquer que le point A est sur la droite D on peut écrire : $A \in D$.

Ensembles de Nombres

- R est l'ensemble des nombres réels,
- Z est l'ensemble des entiers (négatifs ou positifs),
- N l'ensemble des entiers positifs,
- D l'ensemble des nombres décimaux (négatifs ou positifs),
- Q l'ensemble des quotients (négatifs ou positifs) de deux entiers et dont le dénominateur n'est bien sûr pas nul, c'est l'ensemble des rationnels.



1.3 Sous-Ensembles

1.3.1 Définition

Si tous les éléments de l'ensemble A sont aussi éléments de l'ensemble E on écrit $A \subset E$.

1.3.2 Exemple

Prenons $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ et $A = \{0, 3, 6, 9\}$.
On vérifie que $0 \in E$, $3 \in E$, $6 \in E$, $9 \in E$, et donc que $A \subset E$.
On dit que

- A est *inclus* dans E,
- A est un *sous-ensemble* de E,
- A est une *partie* de E.

Par contre, si $B = \{3; 7; 15\}$, comme $15 \in B$ et $15 \notin E$, l'ensemble B n'est pas un sous-ensemble de E, on l'écrit $B \not\subset E$.
Cas particuliers : $E \subset E$ et $\emptyset \subset E$.

inclusion	non-inclusion
$A \subset E$	$B \not\subset E$

1.3.3 Remarque

Dans certains ouvrages on rencontre la notation $A \subseteq E$ pour dire que A est un sous-ensemble de E. Dans ces mêmes ouvrages, la notation $A \subset E$ sigifie alors que A est un sous-ensemble de E et, de plus, que $A \neq E$.
Dans ces ouvrages on a $E \subseteq E$ mais on n'a pas $E \subset E$.

1.3.4 Représentations des Ensembles par des Schémas

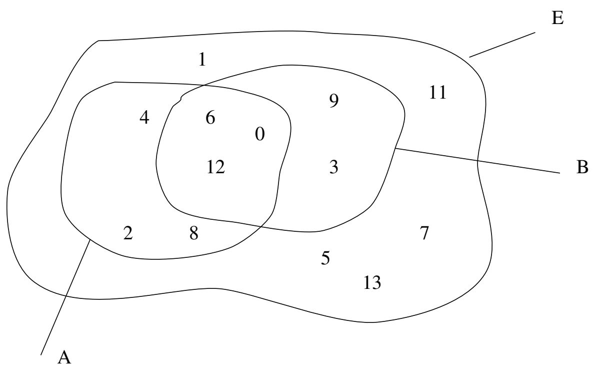


Diagramme de VENN

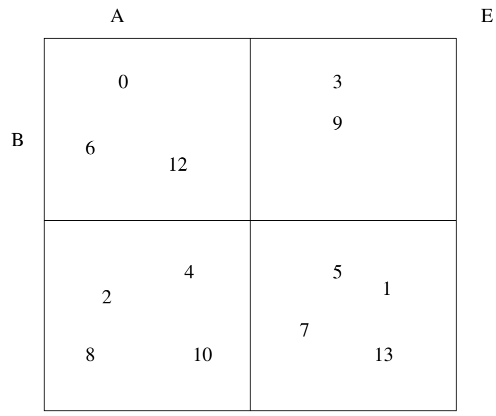


Diagramme de CARROLL

<u>diagramme de Venn</u>
Les éléments de l'ensemble sont représentés à l'intérieur d'une ligne fermée, et seulement les éléments de l'ensemble. les éléments qui n'appartiennent pas à l'ensemble se trouvent donc à l'extérieur de la région entourée.
Sur le diagramme de Venn de la figure de gauche : $A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ ....
<u>diagramme de Carroll</u>
Le carré est divisé verticalement en deux régions, celle de gauche contient les éléments de A, celle de droite contient les éléments qui ne sont pas dans A.
Horizontalement le carré est aussi divisé en deux régions, celle du haut contient les éléments de B.

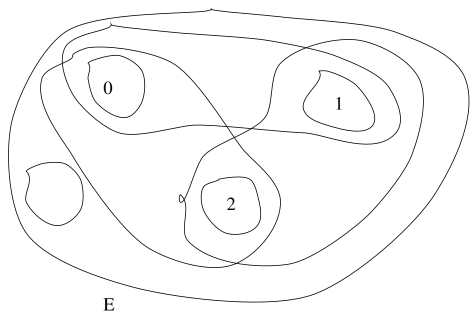
Questions : Quel est l'ensemble des éléments de E
- 1^o qui n'appartiennent ni à A, ni à B ?
- 2^o qui appartiennent à A ou à B mais pas aux deux à la fois ?
- 3^o qui appartiennent à A mais qui n'appartiennent pas à B ?
- 4^o qui appartiennent à la fois aux deux ensembles A et B ?

2 Opérations sur les Parties d'un Ensemble

2.1 L'ensemble des Parties d'un Ensemble

2.1.1 Exemple

Soit $E = \{0; 1; 2\}$.
Les parties (ou sous-ensembles) de E sont :
$\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0; 1\}$, $\{1; 2\}$, $\{0; 2\}$, E.
Ces parties de E sont elles-mêmes les éléments d'un ensemble d'ensemble : l'ensemble des parties de E.

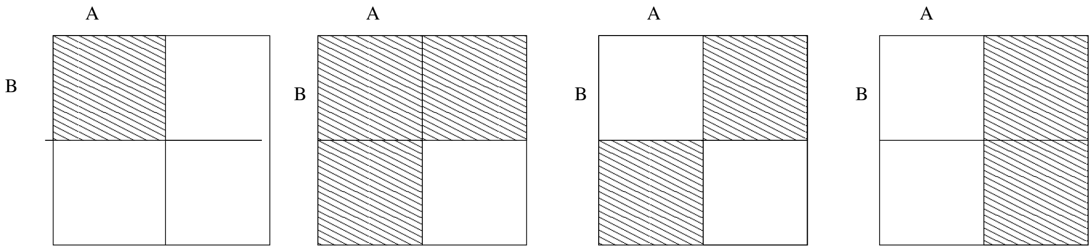


2.1.2 Notation

On note $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ l'ensemble des parties de E.
Dans la suite, on prendra donnera des définitions et des propriétés qui s'appliqueront à des sous ensembles A, B, ..., d'un même ensemble de référence E qui sera en quelque sorte l'univers.

2.2 Intersection et Réunion

2.2.1 Définitions



intersection réunion différence symétrique complémentaire

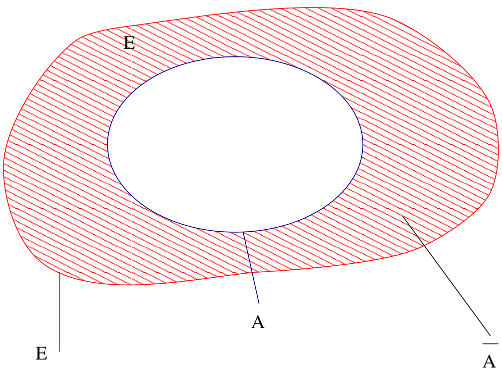
- L'intersection $A \cap B$ des parties A et B de E est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à la fois à A et à B.
- La réunion $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou à B ou aux deux à la fois.

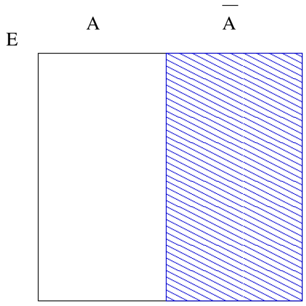
2.2.2 Propriétés

(A, B sont des sous ensembles de E et E est pris comme univers ou ensemble de référence).

$\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$	$\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
$\emptyset \cap E = \emptyset$	$\emptyset \cup E = E$
$E \cap E = E$	$E \cup E = E$
$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \emptyset = A$
$A \cap E = A$	$A \cup E = E$
$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2.3 Complémentaire d'une Partie





2.3.1 Définition

$A \subset E$, le complémentaire de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note $\overline{A}$ ou $C_E A$

2.3.2 Propriétés

(A, B, ..., sont tous des sous ensembles de E qui est l'univers ou l'ensemble de référence).
On déduit immédiatement de la définition :
- $\overline{A} \subset E$,
- $A \cup \overline{A} = E$,
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Quelques propriétés simples :
$\overline{\emptyset} = E$, $\overline{E} = \emptyset$, $\overline{\overline{A}} = A$.
Les propriétés suivantes sont moins immédiates :
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Dessiner des figures qui correspondent à ces propriétés.

3 Produit Cartésien

3.1 Couples

3.1.1 Définition de $E \times F$

E et F étant deux ensembles quelconques, $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) de deux éléments $x \in E$ et $y \in F$.
Cas particulier : Lorsque les deux ensembles E et F sont identiques, on note $E^2 = E \times E$ le produit cartésien de E par lui-même et on l'appelle carré cartésien de E.

3.1.2 Exemples

1. Soit $E = \{0, 1; 2\}$ et $F = \{a, b\}$ on a $E \times F = \{(0, a); (0, b); (1, a); \ldots, (2, b)\}$. E a deux éléments, F en a 3 et $E \times F$ en a 3×2.

2. R^2 est l'ensemble des coordonnées $(x; y)$ des points du plan dans un repère cartésien $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3.1.3 Égalité

Deux couples $(a,\, b)$ et $(c,\, d)$ sont égaux si et seulement si on a à la fois $a = c$ et $b = d$.

Attention $(1,\, 3) \in Z \times Z$ n'est pas égal à $(3,\, 1)$ du même ensemble $Z \times Z$.

3.2 n-uples

3.2.1 Triplets

$E^2 = E \times E \times E$ est l'ensemble des triplets$(x;\, y;\, z)$ d'éléments x, y, z de E.

3.2.2 Suites de n éléments d'un ensemble

$E^n = E \times E \times E \times \cdots \times E$ est l'ensemble des suites finies $(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\, ,\, x_n)$ de n éléments de E.
$(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\, ,\, x_n)$ est appelé un n-uple.

3.3 Dénombrement

3.3.1 Propriétés

Si E est un ensemble fini et si le nombre de ses éléments est n, alors le nombre des éléments de E^p est n^p.
Si E et F sont finis, le nombre des éléments de $E \times F$ est $n(E \times F) = n(E) \times n(F)$.